

Cours - Séquence n° 4 - SUITES (II) :

Comportement d'une suite géométrique (q^n)

Propriété : inégalité de Bernoulli

Soit a un nombre réel strictement positif.

Pour tout entier naturel n , $(1+a)^n \geq 1+na$.

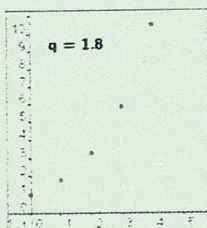
Démonstration *

Soit $a \in \mathbb{R}^{++}$. Raisonnement par récurrence.

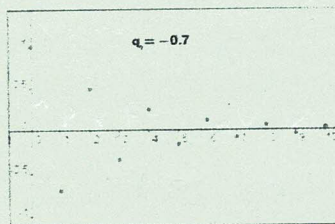
- Propriété : $\forall n \in \mathbb{N} \quad (1+a)^n \geq 1+na$
- Initialisation : Si $n=0$, alors $(1+a)^0 = 1$ et $1+0 \times a = 1$, donc $(1+a)^0 \geq 1+na$.
Donc la propriété est vraie au rang $n=0$.
- Hérédité : Supposons qu'à un rang $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1+na$ et montrons que :
 $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$
 D'après l'hypothèse de récurrence $(1+a)^n \geq 1+na$ et $(1+a) \geq 1+a$:
 $(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a)$
 $(1+a)^{n+1} \geq 1+a+na+na^2$
 $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a + na^2 \geq 1+(n+1)a$ car $na^2 \geq 0$.
 Donc $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$.
 Donc la propriété est vraie au rang $n+1$. Elle est héréditaire.
- Conclusion : D'après le théorème de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad (1+a)^n \geq 1+na$.

Exemples d'introduction

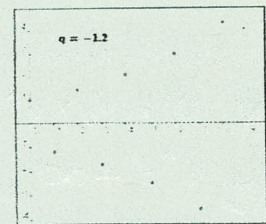
On s'intéresse à $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$ où q est un nombre réel. On a représenté les termes de trois suites de la forme (q^n).



Il semble que :
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1.8^n = +\infty$



Il semble que :
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-0.7)^n = 0$



Il semble que :
 La suite $(-1.2)^n$ n'a pas de limite

Propriété : limite de la suite (q^n) avec q réel**Soit q un nombre réel.**

1. Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
2. Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
3. Si $q = 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$.
4. Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

**Démonstration ***■ **1^{er} cas : $q > 1$**

Il existe un réel $a > 0$ tel que $q = a + 1$.

$\forall n \in \mathbb{N}, q^n = (1 + a)^n$. Donc, d'après l'inégalité de Bernoulli, $q^n \geq 1 + na$.

Or, comme $a > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + na) = +\infty$. Alors, d'après le théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

■ **2^{ème} cas : $-1 < q < 1$** ➤ **1^{er} sous-cas : $0 < q < 1$**

On pose $p = \frac{1}{q}$ et donc $p > 1$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{p}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{p^n}$.

Or, comme $p > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p^n = +\infty$ et, par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{p^n} = 0$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

➤ **2^{ème} sous-cas : $-1 < q < 0$**

On pose $s = -q$ et donc $0 < s < 1$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-s)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \times s^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq (-1)^n \leq 1$, et comme $0 < s, -s^n \leq (-1)^n \times s^n \leq s^n$

Or, comme $0 < s < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} -s^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s^n = 0$.

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \times s^n = 0$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

■ **3^{ème} cas : $q = 1$**

Ce cas est trivial car $\forall n \in \mathbb{N}, q^n = 1$.

■ **4^{ème} cas : $q \leq -1$**

La suite extraite des termes d'indices pairs diverge vers $+\infty$.

La suite extraite des termes d'indices impairs diverge vers $-\infty$.

Or, si la suite avait une limite, elle serait unique. Donc, la suite n'a pas de limite.

Exemple 1

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = -7$ et de raison 4. Étudier la convergence de la suite (u_n) .

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 \times q^n, \text{ donc } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = -7 \times 4^n$$

$$\text{Or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n = +\infty, \text{ car } 4 > 1$$

$$\text{Donc, par produit, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty, \text{ donc la suite } (u_n) \text{ diverge vers } -\infty$$

Exemple 2

Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_1 = 5$ et de raison $\frac{1}{3}$. Étudier la convergence de la suite (v_n) .

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = v_1 \times q^{n-1}, \text{ donc, } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\text{Or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0, \text{ car } -1 < \frac{1}{3} < 1$$

Donc, par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, donc (v_n) converge vers 0.

Exemple 3

Soit (w_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \frac{(-2)^n}{5^n}$. Étudier la convergence de la suite (w_n) .

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \left(\frac{-2}{5}\right)^n = 0, \text{ car } -1 < \frac{-2}{5} < 1 \text{ Donc, } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$$

$$\text{Or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2}{5}\right)^n = 0$$

Donc (w_n) converge vers 0.

Exemple 4

Soit (t_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n = 2^{n+3} - 3^n$. Étudier la convergence de la suite (t_n) .

$$\text{Forme indéterminée } \forall n \in \mathbb{N}, t_n = 3^n \left(\frac{2^{n+3}}{3^n} - 1\right)$$

$$t_n = 3^n \left(\frac{2 \times 2^n}{3^n} - 1\right)$$

$$t_n = 3^n \left(8 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right)$$

$$\text{Or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0, \text{ car } -1 < \frac{2}{3} < 1 \text{ Donc, par produit, puis, par somme, } \lim_{n \rightarrow +\infty} (8 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1) = -1$$

$$\text{Et } \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty, \text{ car } 3 > 1 \text{ Donc, par produit, } \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = -\infty$$

Donc, la suite (t_n) diverge vers $-\infty$.

Exemple 5

Soit (u_n) la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ de raison 0,5 et de premier terme -20.

Soit S_n la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (u_n) .

Étudier la convergence de la suite (S_n) .

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 \times q^n, \text{ donc } u_n = -20 \times 0,5^n$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = -20 \times \frac{1 - 0,5^{n+1}}{1 - 0,5} = -20 \times 2 \times (1 - 0,5^{n+1})$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = -40 \times (1 - 0,5^{n+1})$$

$$\text{Or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^{n+1} = 0, \text{ car } 0 < 0,5 < 1, \text{ donc, par différence, } \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - 0,5^{n+1}) = 1$$

Donc, par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -40$

Donc, la suite (S_n) converge vers -40.

